

Όγδοο Τεστ Απειροστικός Λογισμός 1

Διάρκεια 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

Να απαντήσετε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι αληθείς ή ψευδείς με πλήρη αιτιολόγηση.

- (i) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f .
- (ii) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο τοπικού ακροτάτου της f , τότε $f'(x_0) = 0$.
- (iii) Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης είναι πάντα μικρότερο από ένα τοπικό μέγιστο αυτής.
- (iv) Αν μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή, τότε είναι παραγωγίσιμη.
- (v) Αν $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή και $0 < x < y < z < 1$, τότε $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$.
- (vi) Ισχύει ότι $\sin x \leq \frac{2}{\pi}x$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Θέμα 2

- (i) Να δείξετε ότι: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, για κάθε $x, y \geq 0$.
- (ii) Να δείξετε ότι: $x^x + y^y \geq \sqrt{2}$, για κάθε $x, y > 0$ με $x + y = 1$. Πότε ισχύει η ισότητα;
- (iii) Να μελετήσετε την $f(x) = x^x, x > 0$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.

Θέμα 3

- (i) (a) Έστω μια συνάρτηση $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I . Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν το γράφημα της f κείται πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο του γραφήματος.
(b) Να αποδείξετε ότι $\ln x \leq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, \forall x \geq 1$.
- (ii) Έστω $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ κοίλη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι

$$g(x+y) \leq g(x) + g(y), \forall x, y \geq 0.$$

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!